

УДК 624.012

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАЛКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ МОСТІВ МЕТОДОМ ГАЛЬОРКІНА ЗА РІЗНИХ БАЗИСНИХ ТА ПРОБНИХ ФУНКЦІЙ

М. І. ІГНАТИШИН

Мукачівський державний університет.

*У роботі вирішується науково-технічна задача математичного моделювання напружено-деформованого стану балкових елементів моста шляхом порівняння аналітичних та числових методів дослідження відомої моделі механіки деформівного твердого тіла, що описує балку. Особливістю дослідження є розгляд задачі в різних базисах.*

**Ключові слова:** деформація, будівельні конструкції, балки, диференціальні, математична модель, чисельно-аналітичні схеми.

**Вступ.** Стрімке зростання транспортних перевезень вимагає ремонту, реконструкції та будівництва мостів, ділянок автомобільних та залізничних магістралей, що зазнають найбільших механічних навантажень. Це, в свою чергу, зумовлює необхідність побудови ефективних та надійних схем розрахунку основних конструктивних елементів моста: опори, балки, плити, оболонки. Актуальним питанням є дублювання розв'язків в різних обчислювальних процедурах і порівняння отриманих результатів. Співпадання результатів підвищує їх надійність, а розбіжність дає можливість виявити недоліки відповідних обчислювальних процедур.

### **Аналіз останніх досліджень, публікацій.**

Деформація елементів будівельних конструкцій (балки, плити, оболонки тощо) описується відповідними диференціальними рівняннями, що в сукупності з крайовими умовами складають математичну модель задачі. В окремих випадках вдається отримати точний аналітичний (замкнений) розв'язок крайової задачі розрахунку балочних конструкцій [1, 2]. В більшості практично корисних випадків слід активно залучати відповідні числові обчислювальні процедури. Найбільшого розповсюдження дістали сьогодні проєкційні методи [3-5], прямі варіаційні методи (методи Гальоркіна, Рітца, Бубнова-Гальоркіна) [6-8], а також метод скінченних елементів [9; 10, 11], що є логічним розширенням і вдосконаленням проєкційних методів, які трактуються як проєкція точного розв'язку з нескінченновимірною гільбертовою простору на скінченновимірний простір. Вказані методи дають можливість побудувати наближені розв'язки на основі вибору базисних і пробних функцій.

### **Об'єкт та методи дослідження.**

Метою дослідження є порівняльний аналіз застосувань аналітичних та відповідних чисельних методів до розв'язання крайової задачі розрахунку конструкцій балочного типу.

Об'єктом дослідження є однопролітна балка довжиною  $L$  та моментом інерції поперечного перерізу  $J$  (рис. 1); предметом дослідження є відповідні моделі та методи отримання числових результатів, що описують балку.

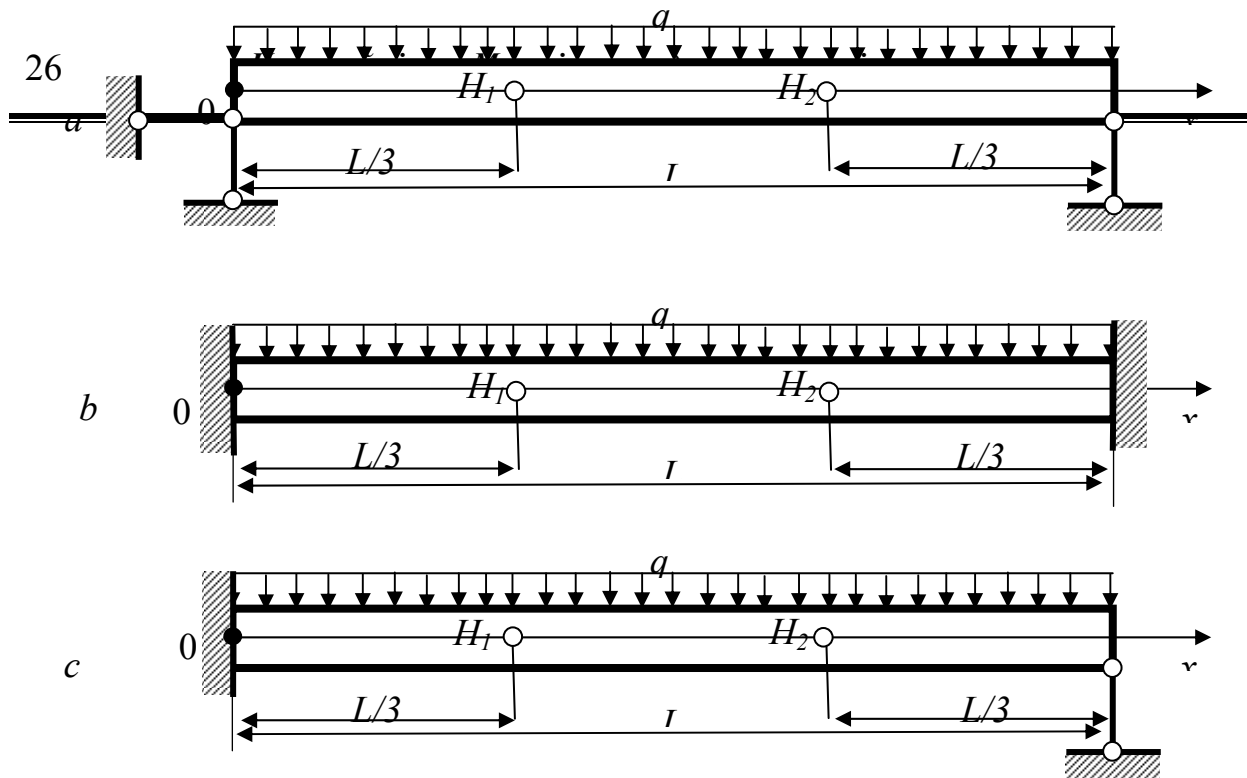


Рис. 1. Балка,  $L$  – довжина балки,  $q$  – поперечне рівномірно розподілене навантаження на балку.  $a$  – балка, вільно оперта з обох боків,  $b$  – балка, консольно закріплена з обох боків,  $c$  – балка, консольно закріплена зліва й вільно оперта справа.  $H_1$  та  $H_2$  – вузли всередині балки.

#### Постановка задачі.

Припускаємо, що на балку діє поперечне рівномірно розподілене навантаження. Введенням нової безрозмірної змінної  $\eta = x/L$  диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$\frac{EJ}{L^4} \frac{d^4 u}{d\eta^4} = q. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) шукатимемо для трьох основних випадків закріплення країв:

– балка, вільно оперта з обох боків, граничні умови для цього випадку мають вигляд:

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \frac{d^2 u(0)}{d\eta^2} = \frac{d^2 u(1)}{d\eta^2} = 0, \quad (2)$$

– консольне защемлення балки з обох боків, граничні умови для цього випадку:

$$u(0) = u(1) = 0; \quad \frac{du(0)}{d\eta} = \frac{du(1)}{d\eta} = 0, \quad (3)$$

– балка, консольно защемлена зліва та вільно оперта справа відповідно до граничних умов:

$$u(0) = u(1) = 0; \quad \frac{du(0)}{d\eta} = 0; \quad \frac{d^2 u(1)}{d\eta^2} = 0, \quad (4)$$

прогин описується функцією:

Дослідимо питання про можливість отримання наближеного розв'язку для балки за вказаних граничних умов із використанням числових проекційних методів та методу скінченних елементів. Для цього будемо трактувати балку як скінченний елемент із двома вузлами  $H_1$  і  $H_2$  всередині (проліт балки розбиваємо на три рівні частини) і двома – на краях.

**Результати дослідження.**

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1) проєкційним методом Галеркіна, розклавши функцію, що описує розв'язок, на дві базисні поліноміальні функції.

Для вільно опертої з двох боків балки розв'язок, що задовольняє граничні умови  $u(0) = u(1) = 0$ , шукаємо у вигляді:

$$u(\eta) = \eta(1 - \eta)(c_1 + c_2\eta + c_3\eta^2 + c_4\eta^3). \quad (5)$$

Базисні функції знайдемо із граничних умов (2) та у вузлових точках  $H_1$  і  $H_2$ :

$$u(1/3) = H_1; \quad u(2/3) = H_2, \quad (6)$$

причому  $H_1, H_2$  тут і далі вагові коефіцієнти для базисних функцій.

Константи  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) у виразі для прогину (5) знайдемо з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, утвореної з виконання групи умов (2) та умов у вузлах (6).

Підставляючи знайдені коефіцієнти  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) у формулу (5) та групуючи отриманий вираз щодо вагових коефіцієнтів, отримуємо:

$$u(\eta) = e_1(\eta)H_1 + e_2(\eta)H_2. \quad (7)$$

де базисні функції:

$$e_1(\eta) = \eta(1 - \eta) \left( \frac{324}{55} + \frac{324}{55}\eta - \frac{2106}{55}\eta^2 + \frac{243}{10}\eta^3 \right);$$

$$e_2(\eta) = \eta(1 - \eta) \left( -\frac{243}{110} - \frac{243}{110}\eta + \frac{3807}{10}\eta^2 - \frac{243}{10}\eta^3 \right). \quad (8)$$

Застосуємо метод Гальоркіна, зважаючи на те, що базисні й пробні функції співпадають. Знайдемо значення вагових коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} 11q \\ 972EJ \\ 11q \\ 972EJ \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Підставляючи знайдені значення (9) у (7), отримаємо шуканий розв'язок диференціального рівняння поперечної деформації балки, що співпадає з аналітичним розв'язком:

$$u(\eta) = \frac{q}{EJ} \left( \frac{\eta}{24} - \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^4}{24} \right). \quad (10)$$

Застосовуючи описану вище числову процедуру, переконуємось, що у випадку решти двох способів закріплення країв відповідні числові схеми також приводять до отриманих аналітичним методом виразів.

Використаємо як базисні функції в методі Гальоркіна систему тригонометричних функцій. Для цього розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді:

$$u(\eta) = A_0 + \sum_{i=1}^3 [A_i \cos(\pi\eta i) + B_i \sin(\pi\eta i)]. \quad (11)$$

Для випадку вільно опертої балки коефіцієнти розкладу (11) знайдемо із системи рівнянь, які формуються на основі граничних умов та умов у вузлах. У результаті маємо:

$$u(\eta) = e_1(\eta)H_1 + e_2(\eta)H_2. \quad (12)$$

де базисні функції виглядатимуть так:

$$e_1(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin(\pi\eta) + \sin(2\pi\eta)]; \quad e_2(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{3} [\sin(\pi\eta) - \sin(2\pi\eta)]. \quad (13)$$

Значення вагових коефіцієнтів  $\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}q/\pi^5 EJ \\ 2\sqrt{3}q/\pi^5 EJ \end{pmatrix}$  і після відповідних перетворень отримуємо прогин  $u(\eta)$ :

$$u(\eta) = \frac{4q}{EJ\pi^5} \sin \pi\eta. \quad (14)$$

Функція, що описує прогин консольно защемленої з обох боків балки відпо-відно до розвинутої методики, матиме вигляд:

$$u(\eta) = \frac{q}{8EJ\pi^4} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (15)$$

а для прогину балки, консольно защемленої зліва та вільно опертої справа, матимемо:

$$u(\eta) = U_0 \left[ \left( \frac{352}{\pi^2} + 75 \right) (2 + \cos \pi\eta - 2 \cos 2\pi\eta - \cos 3\pi\eta) + \frac{1271}{\pi} \begin{pmatrix} 2 \sin \pi\eta - \\ - \sin 2\pi\eta \end{pmatrix} \right], \quad (16)$$

$$\text{де } U_0 = \frac{30}{\pi^2(61952 - 82125\pi^2)}.$$

Виконані числові дослідження показали, що аналітичний метод та адаптовані наближені схеми на основі методу Гальоркіна тенденцію до стійкої адекватності в середовищі поліноміальних та тригонометричних базисних функцій.

Однак, відносна розбіжність результатів, одержаних у різних базисах, значно різниться в залежності від способу закріплення, відстані до місця обпирання або закріплення, розподілу навантаження.

Розрахунки вказують, що розбіжність щодо максимального значення згинальних моментів та прогину консольно защемленої балки становить 13,2 % (за 15 вузлів  $2 \times 10^{-4}$  %).

Рисунок 2 ілюструє суттєвий недолік чисельних методів: «зрив» розв'язку.

Алгоритм чисельного методу містить розв'язок системи рівнянь. За певних умов визначники системи стають меншими «машинного нуля», що й призводить до результату, зображеного на рис. 2 а. Дублювання розв'язку в різних класах базисних функцій покращує чисельний метод, робить його надійнішим. На рисунку 2 б представлено згинальний момент у консольно защемленій балці, що зберігає стійкість.

Розбіжність силових факторів значно більша в різних базисах. Зокрема, розбіжність графіків згинального моменту становить відповідно: за 5-ти вузлів – 120 %; за 15-ти вузлів – 0,04 %.

Розбіжність результатів, отриманих числовим методом у різних базисах для консольно закріпленої з обох боків балки, зменшується з 50 % (чотири вузли зі значеннями  $\eta = 0, 1/3, 2/3, 1$  (рис.3.6 б)) до 12% (п'ять вузлів зі значеннями  $\eta = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ ), якщо збільшити кількість вузлів. Нами виявлено зростання відносної розбіжності результатів, отриманих у різних базисах за стрибкоподібної зміни навантаження уздовж балки.

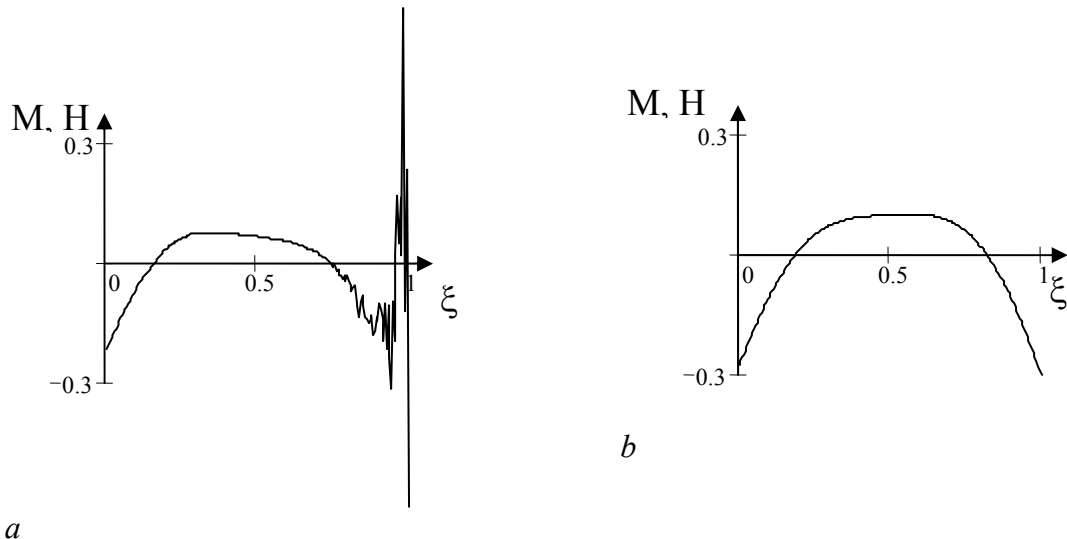


Рис. 2 Згинальний момент у консольно защемленій балці, розрахований чисельним методом із застосуванням 35-ти вузлів (*a* – у поліноміальному базисі втрачена стійкість розв’язку, *b* – тригонометричний базис, розв’язок стійкий).

### Висновки.

Із проведених досліджень можна виокремити наступні положення:

- максимальна відносна розбіжність результатів, отриманих у різних базисах для вільно опертої з обох боків балки, становить  $\approx 2\%$ ;
- для консольно закріпленої  $\approx 50\%$  (рис. 2 *a, b*);
- обґрунтований вибір кількості, розміщення вузлів та оцінка точності чисельного методу можливі шляхом визначення інтегральної та локальної нев’язки розв’язків, отриманих у різних класах базисних функцій;
- «зрив» розв’язку в різних базисах відбувається за різних кількостей вузлів та їх розміщень;
- можуть виникати обчислювальні труднощі, пов’язані з тим, що чисельний метод забезпечує тільки середньоквадратичну, а не рівномірну збіжність до точного розв’язку. Його застосування може супроводжуватися появою осциляцій, позбавлених фізичного змісту

### ЛІТЕРАТУРА

1. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, Матвеев; Отв. ред. Г.С. Писаренко. - 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Наук, думка, 1988. – 736 с.
2. Лучко Й. Й. Методи оцінки несучої здатності і підвищення тріщиностійкості залізобетонних елементів конструкцій. - Львів: Слово і комерція, 1997. – 435 с.
3. Коллатц Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика / Ф. Коллатц - М.: Мир, -444 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1968. - 544 с.
5. Демидович В.Н., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, -664 с.
6. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. - М.: Наука, 1971. - 248 с.
7. Мышкис А.Д. Математика для вузов. Специальные курсы. - М.: Наука, 1971. – 632 с.
8. Лучко Й.Й., Ігнатишин М.І. Визначення деформації балкових елементів аналітичними і числовими методами // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. - Львів: Каменяр, 2006. - Вип. 8. - С.45-58. р
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986. – 318 с.
10. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976.-464 с.
11. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979.- 392 с.