АННОТАЦИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА ЗА РАЗНЫХ БАЗИСНЫХ И ПРОБНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе решается научно-техническая задача математического моделирования напряженно-деформированню состояния балочных элементов моста путем сравнения аналитических и численных методов исследования известной модели механики деформируемого твердого тела, описывающей балку. Особливистю исследования является рассмотрение задачи в различных базисах.

Ключевые слова: *деформация, строительные конструкции, балки, дифференциальные шя, математическая модель, численно-аналитические схемы.*

SUMMARY

DEFINITION STRESS-STRAIN STATE BEAM BRIDGE ELEMENT GALERKIN'S METHOD UNDER DIFFERENT BASELINE AND TEST FUNCTIONS

. *In this paper, solved scientific and technical problem of mathematical modeling of the stress-strain state of the beam bridge elements by comparing the analytical and numerical methods of research known modeliz mechanics of deformable bodies, describing beam. Osoblyvystyu study is to examine the problem in different bases.*

Keywords: *deformation, bridge construction, beams, differential equation, mathematical model, numeric-analytical scheme.*

УДК 539.3

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

С. Ю. БАБИЧ, М. І. ІГНАТИШИН, В. Ф. ЛАЗАР
Мукачівський державний університет.
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка

В даній роботі, із застосуванням методу комплексних потенціалів, для лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями, розглядається змішана плоска задача для ортотропної півплощини. Отримано співвідношення пружності для фізично лінійного ортотропного тіла.

Ключові слова: *пружність, ортотропне тіло,комплексні потенціали*

Вступ. Актуальним питанням є дослідження статики і динаміки пружних основ з залишковими напруженнями, пошук ефективних розв'язків крайових задач ізотропного, анізотропного деформівного твердого тіла та дослідження механіки руйнування композитних матеріалів.

Аналіз останніх досліджень, публікацій. Цими питаннями активно займались та займаються Гузь А. Н. [1] – статика та динаміка деформівних твердих тіл, Мусхелишвили Н. И. [2] – розробка математичних методів комплексної функцій в теорії пружності, ефективні розв'язки декотрих крайових задач теорії пружності в різний час отримані Келдишем М. В., Савиним Г.Н., і іншими авторами [3] – [6]. Однак, залишається ряд невирішених задач.

Об'єкт та методи дослідження. В даній роботі, із застосуванням методу комплексних потенціалів, побудованих академіком НАН України О. М. Гузем [1] для лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями, розглядається одна із змішаних плоских задач для ортотропної півплощини.

Постановка задачі. Нехай ортотропне тіло (нижня півплощина S^{-} $\left(y_{\alpha} < 0\right)$) заповнена таким чином, що має місце однорідний напружений стан

$$S_0^{22} = 0, \qquad \mathrm{S}_0^{11} \neq 0, \qquad \mathrm{S}_0^{33} \neq 0 . \tag{1}$$

Припустимо, що дана півплощина обмежена прямою L $\left(y_{\alpha} = 0\right)$. У випадку ортотропного тіла, яке розглядається у даній праці, будемо вважати, що пружньо – еквівалентні напрямки співпадають з напрямами осей вибраної системи координат. Обмежимося випадком нерівних коренів основного визначального рівняння [1].

Результати дослідження. Із [1] напруження і зміщення через комплексні потенціали мають такий вигляд:

$$\widetilde{Q}_{22} = 2\,\mathrm{Re}\left[\Phi'_1\left(z_1\right) + \Phi'_2\left(z_2\right)\right]; \qquad \mathrm{z_j} = \mathrm{y}_1 + \mu_{\mathrm{j}}\mathrm{y}_2; \quad . \tag{2}$$

$$\widetilde{Q}_{21} = -2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\Phi'_1\left(z_1\right) + \gamma_{21}^{(2)}\mu_2\Phi'_2\left(z_2\right)\right]; \qquad \mu_1 \neq \mu_2; \quad .$$

$$\widetilde{Q}_{12} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\Phi'_1\left(z_1\right) + \mu_2\Phi'_2\left(z_2\right)\right]; \quad . \tag{3}$$

$$\widetilde{Q}_{11} = 2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_{11}^{(1)}\mu_1^2\Phi'_1\left(z_1\right) + \gamma_{11}^{(2)}\mu_2^2\Phi'_2\left(z_2\right)\right]; \quad .$$

$$u_k = 2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_k^{(1)}\Phi'_1\left(z_1\right) + \gamma_k^{(2)}\Phi'_2\left(z_2\right)\right]; \qquad \mathrm{k} = 1, 2..$$

Аналогічно праці [2] введемо деякі позначення. Нехай

$$f(z) = f_1\left(y_1, y_2\right) + i f_2\left(y_1, y_2\right). \tag{4}$$

є деякою функцією комплексної змінної z, визначеною у деякій області площини z. Тоді через $\bar{f}(z)$ позначимо функцію спряжену з $f(z)$. Значення в точках $\bar{z}$, спряжених з z, задовольняє співвідношення:

$$\bar{f}(z) = \overline{f(z)}. \tag{5}$$

або

$$\bar{f}(z) = f_1\left(y_1; -y_2\right) - i \cdot f_2\left(y_1; -y_2\right). \tag{6}$$

Якщо в (3) ввести позначення

$$\omega_j\left(z_j\right) = \Phi'_1\left(z_j\right), \qquad \mathrm{j} = 1,2 . \tag{7}$$

з врахуванням (4) – (6), то вирази для напружень (3) матимуть вигляд

$$\widetilde{Q}_{22} = \omega_1\left(z_1\right) + \omega_2\left(z_2\right) + \overline{\omega}_1\left(\bar{z}_1\right) + \overline{\omega}_2\left(\bar{z}_2\right);$$

$$\widetilde{Q}_{21} = -\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\omega_1\left(z_1\right) - \overline{\mu}_1\overline{\gamma}_{21}^{(1)}\overline{\omega}_1\left(\bar{z}_1\right) - \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\omega_2\left(z_2\right) - \overline{\mu}_2\overline{\gamma}_{21}^{(2)}\overline{\omega}_2\left(\bar{z}_2\right); \tag{8}$$

де

$$z_j = y_1 + \mu_j y_2, \qquad \mu_1 \neq \mu_2;$$

Тепер формули (3) запишемо таким чином

$$\widetilde{Q}_{22} = \omega_1\left(z_1\right) + \overline{\omega_1\left(z_1\right)} + \omega_2\left(z_2\right) + \overline{\omega_2\left(z_2\right)};$$

$$\widetilde{Q}_{21} = -\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\omega_1\left(z_1\right) - \overline{\mu}_1\overline{\gamma}_{21}^{(1)}\overline{\omega_1\left(z_1\right)} + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\omega_2\left(z_2\right) + \overline{\mu}_2\overline{\gamma}_{21}^{(2)}\overline{\omega_1\left(z_2\right)}\right];$$

$$\widetilde{Q}_{12} = -\left[\mu_1\omega_1\left(z_1\right) + \overline{\mu}_1\overline{\omega_1\left(z_1\right)} + \mu_2\omega_2\left(z_2\right) + \overline{\mu}_2\overline{\omega_2\left(z_2\right)}\right];$$

$$\widetilde{Q}_{11} = -\left[\mu_1^{(2)}\gamma_{11}^{(1)}\omega_1\left(z_1\right) + \overline{\mu}_1^{(2)}\overline{\gamma}_{21}^{(1)}\overline{\omega_1\left(z_1\right)} + \mu_2^{(2)}\gamma_{11}^{(2)}\omega_2\left(z_2\right) + \overline{\mu}_2^{(2)}\overline{\gamma}_{11}^{(2)}\overline{\omega_2\left(z_2\right)}\right]; \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial y_1} = \gamma_k^{(1)}\omega_1\left(z_1\right) + \overline{\gamma}_k^{(1)}\overline{\omega_1\left(z_1\right)} + \gamma_k^{(2)}\omega_2\left(z_2\right) + \overline{\gamma}_k^{(2)}\overline{\omega_2\left(z_2\right)};$$

В (9) $\omega_1(z_1)$ та $\omega_2(z_2)$ аналітичні функції у нижній півплощині S^-. Якщо у функції $\omega_1(z_1)$ змінну z_1 замінити на z_2 одержимо аналітичну функцію $\omega_1(z_2)$ в області S^-. Для верхньої півплощини $S^+(y_2>0)$ функцію $\omega_1(z_2)$ можна визначити із такого співвідношення

$$\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\right)\cdot\omega_1(z_2)+\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\bar{\gamma}_{21}^{(1)}\bar{\mu}_1\right)\cdot\overline{\omega}_1(z_2)+\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\bar{\gamma}_{21}^{(1)}\bar{\mu}_2\right)\cdot\overline{\omega}_2(z_2)=0; \qquad 10)$$

Отже, з урахуванням (9) та (10), після деяких перетворень, компоненти напружено-деформованого стану можна зобразити через одну функцію $\omega_1(z_1)$ таким чином:

$$\omega_1(z_1)-\omega_1(\bar{z}_2)+K_1\left[\overline{\omega_1(z_1)}-\overline{\omega_1(z_2)}\right]=f;$$

$$\chi\omega_1(z_1)+\omega_1(\bar{z}_2)+K_2\overline{\omega_1(z_1)}+K_1\overline{\omega_1(z_2)}=g';$$

$$\widetilde{Q}_{11}=2\operatorname{Re}\left\{\gamma_{11}^{(1)}\mu_1^{(2)}\omega_1(z_1)-\gamma_{11}^{(2)}\mu_2^{(2)}\omega_1(z_2)+K_3\left[\gamma_{11}^{(2)}\mu_2^{(2)}\omega_1(z_2)-\bar{\gamma}_{11}^{(2)}\mu_2^{(2)}\omega_1(\bar{z}_2)\right]\right\}; \qquad 11)$$

$$\widetilde{Q}_{12}=-2\operatorname{Re}\left\{\mu_1\omega_1(z_1)-\mu_1\omega_1(z_2)+K_3\left[\mu_1\omega_1(z_2)-\bar{\mu}_1\omega_1(\bar{z}_2)\right]\right\};$$

$$\theta\omega_1(z_1)+\omega_1(\bar{z}_2)+K_4\overline{\omega_1(z_1)}+K_1\overline{\omega_1(z_2)}=h';$$

В (11) введені позначення:

$$f=\frac{\widetilde{\theta}_{22}\gamma_{21}^{(2)}\mu_2+\theta_{21}}{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2+\gamma_{21}^{(1)}\mu_1}; \qquad K_1=\frac{\widetilde{\theta}_{22}\gamma_{21}^{(2)}\mu_2+\theta_{21}}{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2+\gamma_{21}^{(1)}\mu_1};$$

$$\chi=\frac{\chi_1}{\chi_2}; \quad \chi_1=\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}-\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)};$$

$$\chi_2=\frac{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\bar{\gamma}_{21}^{(2)}\bar{\mu}_2}\cdot\left(\bar{\gamma}_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}-\gamma_1^{(2)}\bar{\gamma}_2^{(2)}\right); \qquad 12)$$

$$k_2=\frac{\bar{\gamma}_1^{(1)}\gamma_2^{(2)}-\bar{\gamma}_2^{(1)}\gamma_2^{(2)}}{\chi_2}; \quad \mathrm{g}'=\frac{1}{\chi_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(u_1\gamma_2^{(2)}-u_1\gamma_1^{(2)}\right);$$

$$k_3=\frac{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\gamma_{21}^{(1)}\mu_1}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_2-\bar{\gamma}_{21}^{(2)}\bar{\mu}_2}; \quad \theta=\frac{\theta_1}{\theta_2};$$

$$\theta_1=\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\gamma_2^{(1)}-\gamma_{21}^{(2)}\mu_1\gamma_2^{(2)};$$

$$\theta_2=\frac{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2-\bar{\gamma}_{21}^{(2)}\bar{\mu}_2}\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\bar{\gamma}_2^{(1)}-\bar{\gamma}_{21}^{(1)}\bar{\mu}_1\gamma_2^{(2)}\right);$$

$$\mathrm{k}_4=\frac{\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\bar{\gamma}_2^{(1)}-\bar{\gamma}_2^{(2)}\bar{\mu}_1\gamma_2^{(2)}}{\theta_2};$$

$$\mathrm{h}'=\frac{1}{\theta_2}\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\gamma_2^{(2)}\widetilde{\theta}_{21}\right);$$

Необхідно зауважити, що аналітичні формули для теорії пружності анізотропних тіл класичної теорії пружності (для тіл без початкових напружень) одержані в [3].

Основні задачі для попередньо напруженої ортотропної півплощини. Розглянемо плоску деформацію у нижній півплощині ($y_2 \le 0$) в декартових координатах $(y_1 o y_2)$ початкового стану. Будемо використовувати співвідношення (11) та (12). Нехай для $y_2 = 0$ маємо такі граничні умови:

$$\tilde{\theta}_{22}^{-} = \mathrm{p}(\mathrm{t}); \quad \tilde{\theta}_{21}^{-} = 0; \; u_1 = c_k; \quad (\mathrm{t} \in \mathrm{L}') \tag{13)}$$

де c_k - дійсні постійні, а інші позначення співпадають з [1]. Зазначимо, що із рівності $\omega_1(z_j) = \overline{\omega}_1(z_j)$ випливає, що граничні умови для $\tilde{\theta}_{21}$ виконується автоматично. З врахуванням (12) та (13) для переміщень маємо:

$$\mathrm{Im}\left[\chi \cdot \omega_1^{-}(t) - \omega_1^{+}(t) + (k_1 + k_1) \cdot \omega_1^{-}(t)\right] = 0; \quad (\mathrm{t} \in \mathrm{L}') \tag{14)}$$

Розглянемо випадок $\mathrm{Re}\,\mu_j = 0$. Отже, тепер k_1, k_2, χ дійсні постійні. Тому умову (14) можна записати так:

$$\mathrm{Im}\left[\omega_j(t)\right] = 0; \quad (\mathrm{t} \in \mathrm{L}') \tag{15)}$$

Із (11) і першої умови (13) будемо мати

$$\mathrm{Re}\left[\omega_j^{-}(t)\right] = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{21}^{(2)} \mu_2}{\gamma_{21}^{(2)} \mu_2 - \gamma_{21}^{(1)} \mu_1} \mathrm{p}(\mathrm{t}); \quad (\mathrm{t} \in \mathrm{L}') \tag{16)}$$

Будемо вважати, що в околі нескінченно віддаленої точки виконується умова

$$\omega_1(\infty) = 0; \tag{17)}$$

Таким чином, із (15) – (17) для визначення аналітичної функції $\omega_1(z)$ можна використати формулу Келдиша – Седова [5]. Отже, використовуючи вказані формули маємо

$$\omega_o(z_j) = \frac{\mathrm{X}(z_j)}{2\pi i} \frac{\gamma_{21}^{(2)} \mu_2}{\gamma_{21}^{(2)} \mu_2 - \gamma_{21}^{(1)} \mu_1} \int \frac{\mathrm{p}(\mathrm{t})\, dt}{\mathrm{X}(\mathrm{t})(t - z_j)} + \mathrm{X}(z_j) P_{n-1}(z_j); \tag{18)}$$

де

$$\mathrm{X}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \left[(\xi - a_k)(\xi - b_k)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_{n-1}(\xi) = d_1 \xi^{n-1} + d_2 \xi^{n-2} + \ldots + d_n. \tag{19)}$$

Із співвідношень $\omega_1(z_j) = \overline{\omega}_1(z_j)$ випливає, що постійні, котрі входять в (19), є дійсні. Зауважимо, що для визначення постійних можна використати такі співвідношення:

$$c_{k+1} - \mathrm{c_k} = 2 \int_{\mathrm{a_k}}^{\mathrm{b_k}} \mathrm{Re}\left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1^{-}(t) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2^{-}(t)\right] \cdot dt; \tag{20)}$$

Формула (20) за структурою співпадає з формулою в [5].

Конкретний приклад. Розглянемо співвідношення пружності для фізично лінійного ортотропного тіла у вигляді

$$\sigma_{\mathrm{ij}} = \sigma_{ij} A_{ij} \varepsilon_{kk} + 2(1 - \delta_{ij}) G_{ij} \varepsilon_{ij};$$

$$A_{\mathrm{ik}} = A_{\mathrm{ki}}; \quad \mathrm{G_{ij}} = G_{ji}; \tag{21)}$$

де A_{ik} - коефіцієнт пружності, G_{ij} - модуль зсуву.

Для другого варіанту малих початкових деформацій із [6] одержимо, що у випадку відсутності початкових напружень маємо

$$\gamma_2^{(j)} = 1; \quad \gamma_{11}^{(j)} = 1. \qquad 22)$$

Висновки. Отже, із (20), (22) випливає, що розв’язок даної задачі у випадку відсутності початкових напружень повністю співпадає з відомим з [5] співвідношенням, а саме:

$$\omega_1(z_j) = \frac{X(z_j)}{2\pi i} \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \int_{L'} \frac{p(t)dt}{X(t)(t - z_j)} + X(z_j) p_{n-1}(z_j) \qquad 23)$$

І нарешті необхідно зазначити, що усі одержані результати мають місце у всіх випадках окрім тих коли

$$\gamma_{21}^{(1)}\mu_1 - \gamma_{21}^{(2)}\mu_2 = 0 \text{, нерівні корені,} \qquad 24)$$

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} = 0 \text{, рівні корені,} \qquad 25)$$

Співвідношення (24) та (25) відповідають поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг «PRESS - LIWE», 2007. – 795 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966.-708 с.
3. Савин Г. Н., Прусов И. А. Об одном решении основних задач теории упру гости для анизотропной полуплоскости и анизотропной плоскости с разрезами. – Докл. АН УССР, 1968, серя А, №11, с. 1034 -1037
4. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективные решения некоторых краевых задач для гармонических функцій // Докл. АН СССР. – 1937. – 16, №1. – С. 7-11
5. Левшин А. А. Решение одной смешаной задачи двухмерной теории упругости для анизотропной полуплоскости. Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979, 43, с. 163-168.
6. Гузь А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии – Киев: Наукова думка, 1990. – 629 с.

АННОТАЦИЯ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В данной работе, с применением метода комплексных потенциалов, для линеаризованной теории упругости тел с начальными напряжениями, рассматривается смешанная плоская задача для ортотропной полуплоскости. Получено соотношение упругости для физически линейного ортотропной тела.

Ключевые слова: *упругость, ортотропных тело, комплексные потенциалы*

SUMMARY

MIXED PROBLEM FOR A PRESTRESSED ORTHOTROPIC HALF-PLANE

Mixed plane problem for orthotropic half-plane, using the method of complex potentials for linearized theory of elastic bodies with initial stresses has been considered in the paper. Corelation of elasticity for the physically linear orthotropic body has been obtained.

Keywords: elasticity, orthotropic body, complex potentials.