

залежність між рядами досліджень, якими є антропологічні вимірювання (обхват грудей та обхват стегон).

Висновки

Результати статистичної обробки результатів дослідження антропологічних ознак виборки осіб молодіжної вікової групи дають інформацію про те, що досліджені ряди даних відповідають природньому, тобто нормальному розподілу. Отримане значення коефіцієнту кореляції свідчить про існування достатньо суттєвого зв'язку між рядами даних. Таким чином, незважаючи на зміну основних антропологічних ознак сучасної людини, величина кореляційного зв'язку між ведучими ознаками залишається незмінною. Подальша робота в цьому напрямку полягає у більш ретельних та багатосторонніх дослідженнях антропологічних ознак людини сучасного суспільства. Ця інформація про зміну тілобудову людини необхідна щоб забезпечити повноцінну роботу конструкторів, а отже і повноцінну роботу швейної промисловості взагалі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шершнева Л.П., Пирязева Т.В., Тихонова Т.П. Основы прикладной антропологии и биомеханики: Метод. Указан. К выпол. Лаб. Раб. – М:РИО РосЗИТЛП, 2002.- 82 С.
2. Первичная обработка результатов исследования // Взнесенский В.Л. Из-во. "Наука", - 1970. - 84 с.
3. Дунаевская Т.Н., Коблякова Е.Б., Ивлева Г.С. Размерная типология населения с основами анатомии и морфологии.- М., 2001.- 288с.
4. Конструирование одежды с элементами САПР //Е.Б. Коблякова, Г.С.Ивлева, В.Е.Романов и др.- Легпромбытиздат, 1988.- 463с.
5. Шершнева Л.П., Пирязева Т. В., Основы прикладной антропологии и биомеханики :Учебное пособие. – М.:ФОРУМ:ИНФРА-М, - 2004. – 144 с.
6. Серета С.П. Антропология : Навч. Посібник .- К.:Либідь, - 2001.- 336 с.
7. Святкіна А. Е. Дослідження залежностей розмірних ознак жіночих фігур від кутів переміщення рук у просторі // Вісник КНУТД. - №2.- 2005р. - 125 с.

УДК 3.624.012 539

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ТРЬОХЕЛЕМЕНТНОЇ МОСТОВОЇ ОПОРИ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

М.І. ІГНАТИШИН, Й.Й. ЛУЧКО
Мукачівський технологічний інститут

*Змодельовано деформацію трьохелементної мостової опори методом скінчених елементів
Побудовано графік лінійного переміщення $u(x)$, нормального напруження $\sigma(x)$, сили, що діє в перерізі*

$\sigma(x) \cdot F(x)$, розраховано лінійні переміщення вузлів, реакції скінчених елементів, реакцію опори. Дана математична модель може застосовуватись спеціалістами при моделюванні деформацій в реальних мостових опорах та математиками – програмістами при створенні програмних систем, що реалізують метод скінчених елементів.

Зараз в Україні налічується тисячі мостів з яких значна частина потребує ремонту та реконструкції. Актуальною є проблема проведення проектних робіт по ремонту, реконструкції автомобільних і залізничних мостів, зокрема, проведення розрахунку та моделювання деформацій і навантажень, які виникають в різних частинах моста. Проблема ця комплексна. Вона включає наукову, технічну та фахову складову. Для проведення значної та нестандартної кількості проектних робіт необхідні наукові розробки. Наукові розробки, в свою чергу, необхідно трансформувати в технічні засоби одним з яких є програмний продукт для проектування. Для здійснення наукових розробок та їх трансформації в технічні засоби необхідно підготувати відповідних фахівців.

Абревіатура **МСЕ** відома кожному інженеру – це метод скінчених елементів. Він є одним з найбільш ефективних числових методів розв'язку крайових задач. На теперішній час вийшли в світ десятки тисяч публікацій по **МСЕ**. Переведено велику кількість монографій вчених: Галлагера [1], Аргириса [2], Васидзу [3], Митчела і Уета, Одена і ін.

Об'єкти та методи дослідження

В даній роботі ми поставили собі за мету вказати на напрямки розв'язання згаданої комплексної проблеми на окремо взятому прикладі, моделюванні деформації мостової опори.

В моделюванні деформацій набув широкого використання метод скінчених елементів

Сьогодні є спеціальні системи для моделювання деформацій та навантажень в будівлях, зокрема мостах. Отримані нижче математичні співвідношення можуть бути реалізовані в системі **MATCAD**. Особливість системи **MATCAD**, орієнтованій на професійних математиків [4], в тому, що вона оперує звичними для математика-програміста та науковця, що займається будівельними конструкціями, математичними формулами.

В [5], стор. 42, описано розрахунок деформації одного скінченого елемента розтягнутого (стиснутого) стержня, але нема прикладу розрахунку конструкції, що складається з кількох скінчених елементів. В [1], стор. 70, описано загальну методику

застосування метода скінчених елементів до конструкції розбитої на багато скінчених елементів, але там також розглядається побудова матриці жорсткості тільки для окремого елемента.

Результати дослідження

Застосуємо матрицю жорсткості описану в [5] та загальну методику описану в [1] до конкретної задачі, - моделювання деформації мостової опори, що складається з трьох скінчених елементів. Почнемо з коректної постановки задачі і побудуємо для неї математичну модель метода скінчених елементів.

Для даної задачі характерно, що сили напрямлені вздовж осі опори, Рис.1., а напруження і деформації розподілення по площі опори рівномірно [5].

Функціонал повної потенціальної енергії опори:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot F \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx - \int_0^L p(x) \cdot u(x) \cdot dx \quad (1)$$

Тут $u(x)$ - переміщення напрямлене вздовж осі x - сів, $\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon_x$ - деформація, відносне видовження (стиснення), $E \cdot \frac{du(x)}{dx} = \sigma_x$ - нормальне напруження, рівномірно розподілене по перерізу, $p(x)$ - функція зовнішніх сил напрямлених вздовж опори, L - довжина відповідного скінченого елемента.

Оскільки в функціонал входять тільки перші похідні переміщень то апроксимувати переміщення можна поліномом першого степеня:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x \quad (2)$$

Кожен елемент i має дві степені свободи, - q_i та q_{i+1} . Знайдемо зв'язок між коефіцієнтами полінома та степенями свободи.

Скінчений елемент 1.

Коефіцієнти полінома:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{1}{L_1} \cdot q_1 + \frac{1}{L_1} \cdot q_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Координатні функції:

$$f_{11} = 1 - \frac{1}{L_1} \cdot x \text{ та } f_{12} = \frac{1}{L_1} \cdot x \quad (4)$$

Функція переміщень першого скінченного елемента виражена через степені свободи та координатні функції:

$$u_1(x, q_1, q_2) = q_1 \cdot f_1 + q_2 \cdot f_2 \quad (5)$$

Скінчений елемент 2.

Коефіцієнти полінома:

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2}{L_2} \cdot q_2 - \frac{L_1}{L_2} \cdot q_3 \\ -\frac{1}{L_2} \cdot q_2 + \frac{1}{L_2} \cdot q_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Координатні функції:

$$f_{22} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} - \frac{1}{L_2} \cdot x \text{ та } f_{23} = -\frac{L_1}{L_2} + \frac{1}{L_2} \cdot x \quad (7)$$

Функція переміщень другого скінченного елемента виражена через степені свободи та координатні функції:

$$u_1(x, q_2, q_3) = q_2 \cdot f_{22} + q_3 \cdot f_{23} \quad (8)$$

Скінчений елемент 3.

Коефіцієнти полінома:

$$\begin{pmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 1 & L_1 + L_2 + L_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} \cdot q_3 - \frac{L_1 + L_2}{L_3} \cdot q_4 \\ -\frac{1}{L_3} \cdot q_3 + \frac{1}{L_3} \cdot q_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Координатні функції:

$$f_{33} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} - \frac{1}{L_3} \cdot x \text{ та } f_{34} = -\frac{L_1 + L_2}{L_3} + \frac{1}{L_3} \cdot x \quad (10)$$

Функція переміщень третього скінченного елемента виражена через степені свободи та координатні функції:

$$u_3(x, q_3, q_4) = q_3 \cdot f_{33} + q_4 \cdot f_{34} \quad (11)$$

Матрицю коефіцієнтів жорсткості визначимо за формулою [2]:

$$k_{ij} = F \cdot \int_0^L \sigma_i(x) \cdot \varepsilon_j(x) \cdot dx = \int_0^L E \cdot F \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)_i \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)_j \cdot dx, \quad (12)$$

($i = 1, 2; \quad j = 1, 2$)

Скінчений елемент 1.

$$[K_{11}]^e = E_1 \cdot F_1 \cdot \left[\begin{array}{cc} \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \cdot dx \\ \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \cdot dx \end{array} \right] = \quad (13)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & -\frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 \\ -\frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & \frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 \end{array} \right]$$

Скінчений елемент 2.

$$\begin{aligned}
 [K_{22}]^e &= E_2 \cdot F_2 \cdot \left[\begin{array}{cc} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot dx \\ \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot dx \end{array} \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 \\ \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 & \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

Скінчений елемент 3.

$$\begin{aligned}
 [K_{33}]^e &= E_3 \cdot F_3 \cdot \left[\begin{array}{cc} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{du_3(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_3(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{du_3(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_3(x,0,1)}{dx} \cdot dx \\ \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{du_3(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_3(x,1,0)}{dx} \cdot dx & \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{du_3(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_3(x,0,1)}{dx} \cdot dx \end{array} \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 \\ \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{15}$$

Незв'язна глобальна матриця [3] жорсткості опори моста:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}]^e & [0] & [0] \\ [0] & [K_{22}]^e & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}]^e \end{bmatrix} \tag{16}$$

Де

$$[K_{11}^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad [K_{22}^e] = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad [K_{33}^e] = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

а k_{ij} - коефіцієнти жорсткості відповідних скінчених елементів в глобальній нумерації ($i = 1 \div 6, \quad j = 1 \div 6$).

Глобальна кінематична матриця [1] трьохелементної опори моста:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Глобальна матриця [1] жорсткості:

$$[K] = [A^T] \cdot [K^e] \cdot [A] \quad (19)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & -\frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & \frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 + \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(-\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 & 0 \\ \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) \cdot E_2 \cdot F_2 + \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} - \frac{L_1 + L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(-\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} + \frac{L_1 + L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 \\ \left(-\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} + \frac{L_1 + L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3^2} + \frac{L_1 + L_2}{L_3^2} \right) \cdot E_3 \cdot F_3 \end{bmatrix}$$

Глобальне рівняння жорсткості [1] для опори моста, що пов'язує зовнішні сили та лінійні переміщення вузлів:

$$\{P\} = [K] \cdot \{q\} \quad (21)$$

Згрупуємо степені свободи, що відповідають закріпленим зв'язкам (в даному випадку це один зв'язок опори з фундаментом q_1 і рівняння (21) розіб'ємо на блоки:

$$\begin{Bmatrix} P_s \\ P_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_s \\ q_f \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Оскільки $q_s = q_1 = 0$ то

$$\{P_f\} = [K_{ff}] \cdot \{q_f\}, \quad \{P_s\} = [K_{sf}] \cdot \{q_f\} \quad (23 \text{ а,б})$$

де

$$[K_{ff}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 + \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2}\right) \cdot E_2 \cdot F_2 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2}\right) \cdot E_2 \cdot F_2 & 0 \\ \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2}\right) \cdot E_2 \cdot F_2 & \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2}\right) \cdot E_2 \cdot F_2 + \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2}\right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2}\right) \cdot E_3 \cdot F_3 \\ 0 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2}\right) \cdot E_3 \cdot F_3 & \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2}\right) \cdot E_3 \cdot F_3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{sf}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} \cdot E_1 \cdot F_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{q_f\} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \quad \{P_f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

Загальний розв'язок рівняння в символічному виді:

$$\{q_f\} = [K_{ff}]^{-1} \cdot \{P_f\}. \quad (25)$$

Реакція опори

$$\{P_s\} = [K_{sf}] \cdot \{q_f\}. \quad (26)$$

Реакції скінчених елементів опори моста:

$$\begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

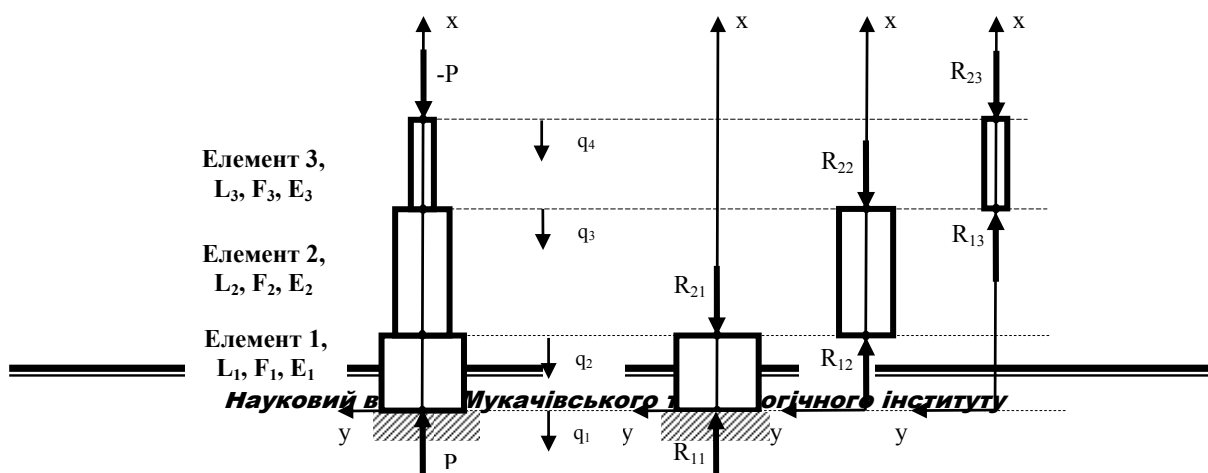


Рис.1. Модель мостової трьохелементної опори, -P – навантаження на опору, P – реакція фундаменту, R₁₁, R₂₁, R₁₂, R₂₂, R₁₃, R₂₃ – реакції скінчених елементів, q₁, q₂, q₃, q₄ – лінійні переміщення вузлів, x, y – осі координат, L₁, F₁, E₁, L₂, F₂, E₂, L₃, F₃, E₃, – довжина, площа перерізу та модуль Юнга відповідного скінченого елемента.

Вихідні дані:

Перший скінчений елемент.

$$E_1 = 1,764 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2} \text{ - модуль Юнга, } F_1 = 5m^2 \text{ - площа поперечного перерізу,}$$

$$L_1 = 5m \text{ - довжина.}$$

Другий скінчений елемент.

$$E_2 = 1,764 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2} \text{ - модуль Юнга, } F_2 = 3m^2 \text{ - площа поперечного перерізу,}$$

$$L_2 = 5m \text{ - довжина.}$$

Третій скінчений елемент.

$$E_3 = 1,764 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2} \text{ - модуль Юнга, } F_3 = 2m^2 \text{ - площа поперечного перерізу,}$$

$$L_3 = 5m \text{ - довжина.}$$

$$\text{Величина навантаження: } P = 2 \cdot 10^6 N.$$

Результат розрахунку:

$$1) \text{ Лінійні переміщення вузлів: } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,134 \times 10^{-4} \\ -3,023 \times 10^{-4} \\ -5,858 \times 10^{-4} \end{pmatrix} m,$$

2) Графіки лінійного переміщення $u(x)$, нормального напруження $\sigma(x)$ та

$F(x)$:

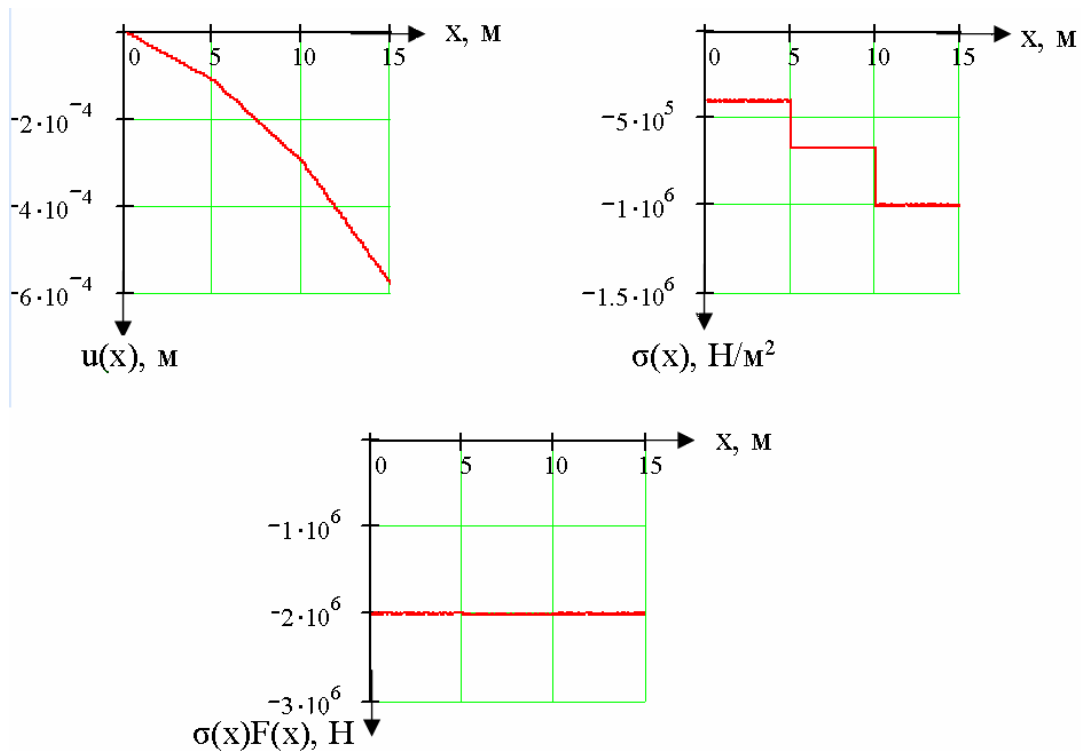


Рис. 2. Графіки лінійного переміщення - $u(x)$, нормального напруження - $\sigma(x)$ та $F(x)$ - сили,

3) Реакції скінчених елементів опори: $\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} = [K_{11}]^e \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} = [K_{22}]^e \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{pmatrix} = [K_{33}]^e \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ -2 \times 10^3 \end{pmatrix} N,$$

$$\begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ -2 \times 10^3 \end{pmatrix} N, \quad \begin{matrix} R_{13} & 2 & 10^6 \\ R_{23} & 2 & 10^6 \end{matrix} N,$$

4) Реакція опори: $P_s = K_{sf} \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$, $P_s = 2 \cdot 10^6 N$

Висновки

Розглянута вище математична модель трьохелементної мостової опори побудована методом скінчених елементів може використовуватись науковцями та спеціалістами будівельниками для розрахунку реальних мостових опор, математиками-програмістами при створенні спеціальних програмних систем, що реалізують метод скінчених елементів.

Модель може застосовуватись для розрахунку трьох-, двох-, і одноелементної мостової опори. Якщо опора двохелементна то модуль Юнга $E_1 = E_2$, площа

поперечного перерізу $F_1=F_2$, а довжини $L_1+L_2 = L-L_3$ причому $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ і L – повна довжина опори. Якщо опора одноелементна то модуль Юнга $E_1=E_2= E_3$, площа поперечного перерізу $F_1=F_2= F_3$, а довжини $L_1+L_2+ L_3 = L$ причому $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, $L_3 \neq 0$ і L – повна довжина опори.

Змодельовано деформацію трьохелементної мостової опори методом скінчених елементів в системі Mathcad. Побудовано графіки лінійного переміщення $u(x)$, нормального напруження $\sigma(x)$, сили, що діє в перерізі $\sigma(x) \cdot F(x)$, розраховано лінійні переміщення вузлів, реакції скінчених елементів, реакцію опори.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984, 428 с.
2. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц./ Под ред. А.Ф.Смирнова: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр.лит. 1968. 240 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987 . 542 с.
4. Дьяконов В. Mathcad 2000: учебный курс- СПб: Питер, 2000. – 592 с,
5. Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С., Пискунов В.Г., Толокнов Ю.Н. Метод конечных элементов, Киев, «Вища школа», 1981 г.

УДК 519.624.3

ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ У КРАЙОВИХ УМОВАХ

О.Ю.ПИТЬОВКА

Мукачівський технологічний інститут

В роботі за допомогою двостороннього методу досліджується крайова задача з параметрами в крайових умовах для квазілінійного диференціального рівняння другого порядку.

В сучасному математичному аналізі і моделюванні важливу роль займає розробка і розвиток конструктивних методів. Незважаючи на те, що дослідження в цій області нараховують всього декілька десятиліть, клас конструктивних методів привертає до себе все більшу увагу.

На даний час навіть не має чіткого визначення, яке б строго обмежувало клас конструктивних методів, але цей термін стає все більш поширеним. Природно вважати, що це є методи побудови розв'язків різного класу рівнянь та дослідження існування і властивостей точних і наближених розв'язків.

Вперше звернули увагу на конструктивну сторону методів в теорії нелінійних коливань і нелінійної механіки. Саме асимптотичні методи, в яких використовуються