

## ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО ЧЛЕНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ЛАНЦЮГОВОГО $C$ -ДРОБУ

The estimation of the remainder of the interpolation continued  $C$ -fraction is obtained.

Получена оценка остаточного члена для интерполяционной цепной  $C$ -дроби.

**Вступ.** Функцію однієї дійсної змінної на деякому компактї можна інтерполювати узагальненим багаточленом [1, 2]  $g(x; f; c_0, c_1, \dots, c_n) = c_0\varphi_0(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ , де  $\{\varphi_i(x)\}$  – система функцій Чебишова, апроксимантою Ньютона–Паде [3] або ланцюговим дробом [4]. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами вперше була розглянута Ю. Вронським [5, 6] в 1811–1817 рр. та більш ґрунтовно Т. Н. Тіле [7] у 1909 р. В монографії [8] встановлено формулу залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Узагальнення формули залишкового члена для випадку, коли частинні чисельники і знаменники інтерполяційного ланцюгового дробу – багаточлени, отримано в роботі [9]. У [10] обґрунтовано нові оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Дану роботу присвячено встановленню оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового  $C$ -дробу.

### Формула залишкового члена функціонального інтерполяційного ланцюгового дробу.

Нехай функцію  $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathfrak{X})$ , де  $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$  – компакт, задано значеннями в інтерполяційних вузлах

$$\Lambda = \{x_i: x_i \in \mathfrak{X}, i = 0, 1, \dots, n, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}. \quad (1)$$

Нехай  $Y = \{y_i: y_i = f(x_i), x_i \in \Lambda\}$  – множина значень функції  $f(x)$  у вузлах (1).

Маємо функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) вигляду

$$D(x) = b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x) + \frac{a_2(x)}{b_2(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{b_n(x) + \dots}}} = b_0(x) + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{b_k(x)},$$

де  $a_k(x), b_k(x) \in C(\mathfrak{X})$ ,  $a_k(x) \neq 0$ , та  $n$ -й підхідний дріб ( $n$ -е наближення) ФЛД

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x) + \frac{a_2(x)}{b_2(x) + \dots + \frac{a_n(x)}{b_n(x)}}} = b_0(x) + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \quad (2)$$

Розглянемо множину інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), тобто функціональних ланцюгових дробів, що задовольняють інтерполяційну умову

$$D_n(x_i) = \frac{P_n(x_i)}{Q_n(x_i)} = b_0(x_i) + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Якщо функція  $f(x) \in C^{(n+1)}(\mathfrak{X})$ , канонічні чисельник  $P_n(x)$  та знаменник  $Q_n(x)$  ФЛД (2) – багаточлени,  $\deg P_n(x) \leq n$ , то залишковий член ІЛД визначається за формулою [9]

$$R_n(x) = f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}{(n+1)! Q_n(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n(x)] \Big|_{x=\xi}, \quad \xi \in \mathfrak{X}. \quad (4)$$

Канонічний знаменник  $Q_n(x)$  ФЛД (2) визначається через елементи дробу  $a_k(x)$ ,  $b_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , за допомогою формули Ойлера – Міндінга [11]. Канонічний знаменник  $Q_n(x)$  також можна подати у вигляді [12]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x) \sum_{k=0}^l R_{k,1}^{[n]}(x), \quad (5)$$

де

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2}(x) \dots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k}(x), \quad R_{0,s}^{[n]}(x) = 1, \quad (6)$$

$l = [n/2]$ ,  $[ ]$  – ціла частина числа,  $X_i(x) = a_{i+1}(x)/(b_i(x)b_{i+1}(x))$ ,  $B_1^{[n]}(x) = \prod_{i=1}^n b_i(x)$ .

У свою чергу  $R_{k,s}^{[n]}(x)$  задовольняють рекурентне співвідношення

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x) R_{k-1,i+2}^{[n]}(x). \quad (7)$$

Легко бачити, що  $R_{1,1}^{[n]}(x)$  містить  $n - 1$  доданок,  $R_{2,1}^{[n]}(x) - (n - 3)(n - 2)/2!$  доданків,  $R_{3,1}^{[n]}(x) - (n - 5)(n - 4)(n - 3)/3!$  доданків,  $\dots$ ,  $R_{k,1}^{[n]}(x) - \prod_{i=1}^k (n - 2k + i)/k!$  доданків.

Використовуючи формулу Лейбніца для похідної  $i$ -го порядку добутку двох функцій, з (5) маємо

$$(Q_n(x))^{(i)} = \sum_{j=0}^i \mathbf{C}_i^j (B_1^{[n]}(x))^{(i-j)} \sum_{k=0}^l (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(j)},$$

тоді

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n(x)] &= f^{(n+1)}(x) Q_n(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^i f^{(n+1-i)}(x) \times \\ &\times \sum_{m=0}^i \mathbf{C}_i^m (B_1^{[n]}(x))^{(i-m)} \sum_{k=0}^l (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Крім того, з (7) впливає рекурентна формула

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^m \mathbf{C}_m^i X_j^{(i)}(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-i)}. \quad (9)$$

**Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле та інтерполяційний ланцюговий С-дріб.** Якщо наближення функції  $y = f(x)$  на компакт  $\mathfrak{X}$  шукати у вигляді інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (Т-ЛД) [7, 9, 13]

$$D_n^{(t)}(x) = \frac{P_n^{(t)}(x)}{Q_n^{(t)}(x)} = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{x - x_{k-1}}{b_k}, \quad (10)$$

то коефіцієнти  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , ланцюгового дробу визначаються з умови (3) через значення функції  $f(x)$  в інтерполяційних вузлах (1): або через обернені поділені різниці [4, 14]  $b_k = \Phi_k[x_0, \dots, x_k]$ , де обернені поділені різниці  $\Phi_k[x_0, x_1, \dots, x_k]$  обчислюються за рекурентною формулою

$$\Phi_k[x_0, \dots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \quad \Phi_0[x] = f(x),$$

або за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу [12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} + \dots + \frac{x_k - x_1}{-b_1} + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}.$$

Якщо наближення функції шукають у вигляді інтерполяційного ланцюгового  $C$ -дробу ( $C$ -ІЛД) [15, 16]

$$D_n^{(c)}(x) = \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} = a_0 + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x - x_{k-1})}{1}, \quad (11)$$

то коефіцієнти  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , ланцюгового дробу визначаються з умови (3) за значеннями функції  $f(x)$  в інтерполяційних вузлах (1) за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу

$$a_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left( -1 + \frac{a_{k-1}(x_k - x_{k-2})}{-1} + \frac{a_{k-2}(x_k - x_{k-3})}{-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{a_2(x_k - x_1)}{-1} + \frac{a_1(x_k - x_0)}{y_k - a_0} \right), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \quad (12)$$

Легко бачити, що  $C$ -ІЛД (11) еквівалентний  $T$ -ІЛД (10), оскільки між коефіцієнтами  $b_k$  та  $a_k$  інтерполяційних ланцюгових дробів мають місце співвідношення  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = 1/b_1$ ,  $a_k = 1/(b_k b_{k-1})$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Однак зауважимо, що формула (12) дозволяє знаходити коефіцієнти  $C$ -ІЛД (11) безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах.

Використовуючи прямий рекурентний алгоритм [4], можна довести наступне твердження.

**Теорема 1.** *Степені багаточленів канонічних чисельника  $P_n^{(c)}(x)$  та знаменника  $Q_n^{(c)}(x)$   $C$ -ІЛД (11) задовольняють нерівності  $\deg P_n^{(c)}(x) \leq [(n+1)/2]$ ,  $\deg Q_n^{(c)}(x) \leq [n/2]$ .*

**Оцінка залишкового члена  $C$ -ІЛД.** Доведемо для  $C$ -ІЛД (11) твердження, аналогічне теоремі 2 [10] для  $T$ -ІЛД.

**Теорема 2.** *Нехай функція  $f(x)$  належить  $\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathfrak{X})$  і за значеннями функції  $f(x)$  в інтерполяційних вузлах (1) побудовано  $C$ -ІЛД (11). Тоді для довільного  $x \in \mathfrak{X}$  залишковий член  $C$ -ІЛД  $R_n(x) = f(x) - P_n^{(c)}(x)/Q_n^{(c)}(x)$  задовольняє нерівність*

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^* \prod_{k=0}^n |x - x_k|}{(n+1)! |Q_n^{(c)}(x)|} \left( \kappa_{n+1}(\rho) + \sum_{m=1}^l \mathbf{C}_{n+1}^m(a^*)^m \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \right), \quad (13)$$

де

$$\kappa_n(\rho) = ((1 + \sqrt{1 + 4\rho})^n - (1 - \sqrt{1 + 4\rho})^n) / 2^n \sqrt{1 + 4\rho},$$

$$f^* = \max_{0 \leq i \leq l} \max_{x \in \mathfrak{X}} |f^{(n+1-i)}(x)|,$$

$$\rho = da^*, \quad d = \text{diam } \mathfrak{X}, \quad a^* = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad l = [n/2].$$

**Доведення.** У випадку С-ІЛД  $B_1^{[n]} \equiv 1$ ,  $X_j(x) = a_{j+1}(x - x_j)$ ,  $X_j'(x) = a_{j+1}$  і  $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n-1, k = 2, 3, \dots, n-1$ . Формула (9) набирає вигляду

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \left(X_j(x) \left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m)} + m a_{j+1} \left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\right)^{(m-1)}\right). \quad (14)$$

Оскільки  $R_{k,1}^{[n]}(x)$  – багаточлен  $k$ -го степеня, то

$$\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = 0 \quad \text{при } k < m. \quad (15)$$

Згідно з теоремою 1 степінь багаточлена знаменника  $\deg Q_n(x) \leq l$ , тоді формулу (8) можна записати у вигляді

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n^{(c)}(x)] = f^{(n+1)}(x) Q_n^{(c)}(x) + \sum_{m=1}^l \mathbf{C}_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^l \left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}. \quad (16)$$

Знайдемо значення похідної  $\left(R_{k,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)}$  при  $k = m, m+1, \dots, l$ . При  $k = m$  з (14) з урахуванням (15) отримуємо  $\left(R_{m,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m! N_{m,1}^{[n,0]}$ , де

$$N_{s,t}^{[n,0]} = \sum_{j_1=t}^{n+1-2s} a_{j_1+1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2s} a_{j_2+1} \dots \sum_{j_s=j_{s-1}+2}^{n-1} a_{j_s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (17)$$

При  $k = m+1$  із (14) маємо  $\left(R_{m+1,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m! N_{m+1,1}^{[n,1]}(x)$ , де

$$N_{s+1,t}^{[n,1]}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2s} \left(X_j(x) N_{s,j+2}^{[n,0]} + a_{j+1} N_{s,j+2}^{[n,1]}(x)\right), \quad N_{1,t}^{[n,1]}(x) = R_{1,t}^{[n]}(x). \quad (18)$$

За індукцією з формули (14) отримуємо  $\left(R_{m+s,1}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = m! N_{m+s,1}^{[n,s]}(x)$ ,  $s = 1, 2, \dots, l-m$ , де

$$N_{m+s,t}^{[n,s]}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)} \left(X_j(x) N_{m+s-1,j+2}^{[n,s-1]}(x) + a_{j+1} N_{m+s-1,j+2}^{[n,s]}(x)\right), \quad N_{s,t}^{[n,s]}(x) = R_{s,t}^{[n]}(x). \quad (19)$$

Формула (16) набирає вигляду

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n^{(c)}(x)] = f^{(n+1)}(x) Q_n^{(c)}(x) + \sum_{m=1}^l \mathbf{C}_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x) m! \sum_{k=m}^l N_{k,1}^{[n,k-m]}(x). \quad (20)$$

Тоді

$$\left| \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n^{(c)}(x)] \right| \leq f^* \left( \left| Q_n^{(c)}(x) \right| + \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m m! \sum_{k=m}^l \left| N_{k,1}^{[n,k-m]}(x) \right| \right). \quad (21)$$

Згідно з теоремою 1 [13]

$$\left| Q_n^{(c)}(x) \right| \leq \kappa_{n+1}(\rho). \quad (22)$$

Знайдемо оцінки  $\left| N_{k,1}^{[n,k-m]}(x) \right|$  при  $k = m, m+1, \dots, l$ . При  $k = m$  з (17) маємо

$$\left| N_{m,i+2}^{[n,0]}(x) \right| \leq \frac{(a^*)^m}{m!} \prod_{j=1}^m (n-1-i-2m+j).$$

При  $k = m+1$  із формули (18) отримуємо

$$\left| N_{m+1,i+2}^{[n,1]}(x) \right| \leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2m} \left( \left| X_j(x) \right| \left| N_{m,j+2}^{[n,0]}(x) \right| + |a_{j+1}| \left| N_{m,j+2}^{[n,1]}(x) \right| \right). \quad (23)$$

При  $m = 0$  з (23) маємо  $\left| N_{1,i+2}^{[n,1]}(x) \right| = \left| R_{1,i+2}^{[n]}(x) \right| \leq da^*(n-i-2)$ . При  $m = 1$  з (23) випливає, що

$$\left| N_{2,i+2}^{[n,1]}(x) \right| \leq 2d(a^*)^2 \sum_{j=i+2}^{n-3} (n-j-2) = d(a^*)^2 (n-i-4)(n-i-3).$$

За індукцією доведемо, що

$$\left| N_{k,i+2}^{[n,1]}(x) \right| \leq \frac{d(a^*)^k}{(k-1)!} \prod_{j=1}^k (n-i-2k+j-1), \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (24)$$

При  $k = 1, 2$  формула (24) виконується. Припустимо, що вона має місце при  $k = t$ . Тоді при  $k = t+1$  з (23) отримуємо

$$\begin{aligned} \left| N_{t+1,i+2}^{[n,1]}(x) \right| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2t} \left( \left| X_j(x) \right| \left| N_{t,j+2}^{[n,0]}(x) \right| + |a_{j+1}| \left| N_{t,j+2}^{[n,1]}(x) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2k} \left( da^* \frac{(a^*)^t}{t!} \prod_{l=1}^t (n-j-2t+l-1) + a^* \frac{d(a^*)^t}{(t-1)!} \prod_{l=1}^t (n-j-2t+l-1) \right) = \\ &= \frac{d(a^*)^{t+1}}{t!} \prod_{j=1}^{t+1} (n-i-2(t+1)+j-1), \end{aligned}$$

тобто формула (24) має місце і в цьому випадку.

Покажемо, що

$$\left| N_{m+s,i+2}^{[n,s]}(x) \right| \leq \frac{d^s (a^*)^{m+s}}{m! s!} \prod_{l=1}^{m+s} (n-i-2(m+s)+l-1), \quad s = 0, 1, \dots, l-m. \quad (25)$$

При  $s = 0, 1$  формула (25) виконується. Припустимо, що дана формула виконується при  $s = k$ . Тоді при  $s = k + 1$  з (19) отримуємо

$$\left| N_{m+k+1, i+2}^{[n, k+1]}(x) \right| \leq \sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)} \left( |X_j(x)| \left| N_{m+k, j+2}^{[n, k]}(x) \right| + |a_{j+1}| \left| N_{m+k, j+2}^{[n, k+1]}(x) \right| \right). \quad (26)$$

При  $m = 0$  з (19) одержуємо

$$\left| N_{k+1, i+2}^{[n, k+1]}(x) \right| = \left| R_{k+1, i+2}^{[n]}(x) \right| \leq \frac{d^{k+1} (a^*)^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=1}^{k+1} (n - i - 2(k+1) + j - 1).$$

При  $m = 1$  з (26) знаходимо

$$\left| N_{k+2, i+2}^{[n, k+1]}(x) \right| \leq \frac{d^{k+1} (a^*)^{k+2}}{(k+1)! 1!} \prod_{j=1}^{k+2} (n - i - 2(k+2) + j - 1).$$

Припустимо, що (25) виконується при  $m = t$ . Тоді при  $m = t + 1$  з (26) маємо

$$\begin{aligned} \left| N_{k+t+2, i+2}^{[n, k+1]}(x) \right| &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left( |X_j| \left| N_{k+t+1, j+2}^{[n, k]}(x) \right| + |a_{j+1}| \left| N_{k+t+1, j+2}^{[n, k+1]}(x) \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left( d a^* \frac{d^k (a^*)^{k+t+1}}{k! (t+1)!} \prod_{l=1}^{k+t+1} (n - j - 2(k+t+1) + l - 1) + a^* \frac{d^{k+1} (a^*)^{k+t+1}}{(k+1)! t!} \times \right. \\ &\times \left. \prod_{l=1}^{k+t+1} (n - i - 2(k+t+1) + l - 1) \right) = \frac{d^{k+1} (a^*)^{k+t+2}}{(k+1)! (t+1)!} \prod_{j=1}^{k+t+2} (n - i - 2(k+t+2) + j - 1). \end{aligned}$$

Формула (25) є правильною і в цьому випадку, отже, вона є правильною при довільних  $s$  та  $m$ . Із (25) випливає, що

$$\left| N_{m+s, 1}^{[n, s]}(x) \right| \leq \frac{d^s (a^*)^{m+s}}{m! s!} \prod_{l=1}^{m+s} (n - 2(m+s) + l). \quad (27)$$

З (4), (21), (22) та (27) отримуємо (13).

Теорему 2 доведено.

Доведемо наступне допоміжне твердження.

**Теорема 3.** Якщо частинні чисельники  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , скінченного ФЛД

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = a_0(x) + \prod_{i=1}^n \frac{a_i(x)}{1} \quad (28)$$

при всіх значеннях  $x \in \mathcal{R}$  задовольняють умову типу Пейдона–Уолла  $|a_i(x)| \leq t(1-t)$ , де  $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ , то знаменник  $Q_n(x)$  ФЛД (28) задовольняє нерівність

$$|Q_n(x)| \geq \begin{cases} \frac{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}}{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}, & \text{якщо } 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \frac{n+2}{2(n+1)}, & \text{якщо } t = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (29)$$

**Доведення.** Поряд із ФЛД (28) розглянемо скінченний ланцюговий дріб

$$f_n = 1 + \prod_{i=1}^n \frac{-t(1-t)}{1}. \quad (30)$$

Нехай  $f_k^{(n)}$ ,  $A_k^{(n)}$ ,  $B_k^{(n)}$  — відповідно  $k$ -й залишок, чисельник та знаменник  $k$ -го залишку ланцюгового дроби (30)

$$f_k^{(n)} = \frac{A_k^{(n)}}{B_k^{(n)}} = 1 + \prod_{i=k+1}^n \frac{-t(1-t)}{1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0, \quad (31')$$

$$f_{n+1}^{(n)} = 1, \quad A_{n+1}^{(n)} = 0, \quad B_{n+1}^{(n)} = 1. \quad (31'')$$

Легко бачити, що мають місце рекурентні співвідношення

$$f_k^{(n)} = 1 + \frac{-t(1-t)}{f_{k+1}^{(n)}}, \quad (32')$$

$$B_k^{(n)} = B_{k+1}^{(n)} - t(1-t)B_{k+2}^{(n)}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0, \quad (32'')$$

$$A_k^{(n)} = B_{k-1}^{(n)}. \quad (32''')$$

Доведемо, що

$$B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i (1-t)^{n-k+1-i}. \quad (33)$$

При  $k = n, n-1$  маємо  $B_n^{(n)} = 1 = (1-t) + t$ ,  $B_{n-1}^{(n)} = 1 - t(1-t) = (1-t)^2 + (1-t)t + t^2$ . Припустимо, що (33) має місце при  $k = n, n-1, \dots, s+1$ . Тоді при  $k = s$  з формули (32'') випливає, що  $B_s^{(n)} = B_{s+1}^{(n)} - t(1-t)B_{s+2}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-s+1} t^i (1-t)^{n-s+1-i}$ . Таким чином, формула (33) виконується при довільному  $k$ .

Якщо  $t = \frac{1}{2}$ , то з (33) маємо

$$B_k^{(n)} = \frac{n-k+2}{2^{n-k+1}}. \quad (34)$$

Нехай  $0 < t < \frac{1}{2}$ . В (33) виконаємо заміну  $t = 1/\theta$ ,  $\theta > 2$ . Тоді

$$B_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-k+1} t^i (1-t)^{n-k+1-i} = \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{1}{\theta^i} \frac{(\theta-1)^{n-k+1-i}}{\theta^{n-k+1-i}} =$$

$$= \frac{1}{\theta^{n-k+1}} \sum_{i=0}^{n-k+1} (\theta - 1)^{n-k+1-i} = \frac{1}{\theta^{n-k+1}} \frac{(\theta - 1)^{n-k+2} - 1}{\theta - 2}.$$

Повертаючись до  $t$ , маємо

$$B_k^{(n)} = \frac{(1-t)^{n-k+2} - t^{n-k+2}}{1-2t}. \quad (35)$$

Через  $\mathcal{D}_k^{(n)}(x)$  позначимо  $k$ -й залишок ланцюгового дробу (28):

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(x) = 1 + \prod_{i=k+1}^n \frac{a_i(x)}{1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0, \quad \mathcal{D}_n^{(n)}(x) = 1.$$

Очевидно, що має місце рекурентне співвідношення

$$\mathcal{D}_k^{(n)}(x) = 1 + \frac{a_{k+1}(x)}{\mathcal{D}_{k+1}^{(n)}(x)}, \quad k = n-1, \dots, 0. \quad (36)$$

Доведемо нерівність

$$|\mathcal{D}_k^{(n)}(x)| \geq f_k^{(n)}. \quad (37)$$

При  $k = n, n-1$  з (36) маємо

$$|\mathcal{D}_n^{(n)}(x)| = 1 = f_n^{(n)}, |\mathcal{D}_{n-1}^{(n)}(x)| = \left| 1 + \frac{a_n(x)}{1} \right| \geq \left| 1 - \frac{|a_n(x)|}{1} \right| \geq 1 - \frac{t(1-t)}{1} = f_{n-1}^{(n)}.$$

Припустимо, що нерівність (37) виконується при  $k = n-1, n-2, \dots, s+1$ . Тоді при  $k = s$  з рекурентного співвідношення (36) випливає

$$|\mathcal{D}_s^{(n)}(x)| = \left| 1 + \frac{a_s(x)}{\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(x)} \right| \geq \left| 1 - \frac{|a_s(x)|}{|\mathcal{D}_{s+1}^{(n)}(x)|} \right| \geq 1 - \frac{t(1-t)}{f_{s+1}^{(n)}} = f_s^{(n)}.$$

Отже, нерівність (37) виконується при довільному  $k$ .

Оскільки

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1 + \frac{a_1(x)}{\mathcal{D}_1^{(n)}(x)},$$

то  $|Q_n(x)| \geq f_1^{(n)}$ ,  $|P_n(x)| \geq f_0^{(n)}$ . Враховуючи (31), (32), (34), (35), отримуємо (29).

Теорему 3 доведено.

**Теорема 4.** Нехай функція  $f(x)$  належить  $\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathfrak{X})$ , за значеннями функції  $f(x)$  в інтерполяційних вузлах (1) побудовано С-ІЛД (11) і частинні чисельники С-ІЛД задовольняють умову типу Пейдона–Уолла, тобто  $0 < \rho \leq t(1-t)$ , де  $\rho = a^* d$ ,  $a^* = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ ,  $d = \text{diam} \mathfrak{X}$ ,  $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ . Тоді для довільного  $x \in \mathfrak{X}$  мають місце такі оцінки залишкового члена  $R_n(x) = f(x) - P_n^{(c)}(x)/Q_n^{(c)}(x)$  інтерполяційного ланцюгового дробу (11):

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^* d^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}} \left( \kappa_{n+1}(t(1-t)) + \right.$$



$$+ \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m \frac{t^m(1-t)^m}{d^m} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{t^i(1-t)^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big) \quad \text{при } 0 < t < \frac{1}{2} \quad (38)$$

$i$

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^* d^{n+1}}{n!} \frac{2}{n+2} \left( \kappa_{n+1} \left( \frac{1}{4} \right) + \sum_{m=1}^l C_{n+1}^m \frac{1}{(4d)^m} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{1}{4^i i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \right) \quad \text{при } t = \frac{1}{2}, \quad (39)$$

де  $\kappa_n(\rho)$ ,  $f^*$ ,  $l$  визначено в умові теореми 2.

**Доведення.** Згідно з умовою даної теореми  $a^* \leq t(1-t)/d$ . Тоді з теорем 2, 3 отримуємо нерівності (38), (39).

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень: У 2 ч. – Київ: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
2. Привалов А. А. Теория интерполирования функций: В 2 кн. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – 423 с.
3. Бейкер (мл.) Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. Скоробогатко В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. Hoene-Wroński J. M. Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique. – Paris: Courcier, 1811. – 269 p.
6. Hoene-Wroński J. M. Philosophie de la Technie Algorithmique: Loi Suprême et universelle des Mathématiques. – Paris: de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, 1815–1817. – 286 p.
7. Thiele T. N. Interpolationsrechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – xii + 175 S.
8. Milne-Thomson L. M. The calculus of finite differences. – London: MacMillan and Co., 1933. – xxiii+558 p.
9. Пагіря М. М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 4. – С. 57–64.
10. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, № 11. – С. 1548–1554.
11. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1954. – Bd I. – 194 S.
12. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72–79.
13. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 2005. – Вип. 10-11. – С. 77–87.
14. Hildebrand F. B. Introduction to numerical analysis. – 2 nd ed. – New York: Dover Publ., Inc., 1987. – 669 p.
15. Пагіря М. М. Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т кібернетики НАН України, 2001. – Т. 1. – С. 328–333.
16. Pahirya M. M. Interpolation function of non-Thiele continued fractions // Commun. Anal. Theory Contin. Fractions – 2002. – 10. – P. 59–62.

Одержано 27.05.13



# МУКАЧІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

89600, м. Мукачево, вул. Ужгородська, 26

тел./факс +380-3131-21109

Веб-сайт університету: [www.msu.edu.ua](http://www.msu.edu.ua)

E-mail: [info@msu.edu.ua](mailto:info@msu.edu.ua), [pr@mail.msu.edu.ua](mailto:pr@mail.msu.edu.ua)

Веб-сайт Інституційного репозитарію Наукової бібліотеки МДУ: <http://dspace.msu.edu.ua:8080>

Веб-сайт Наукової бібліотеки МДУ: <http://msu.edu.ua/library/>